KP hierarchy の対称性と保存量(ソリトン理論における広田の方法)

松木平, 淳太; 薩摩, 順吉

数理解析研究所講究録
第684巻 1989年 160-183

KP hierarchy の対称性と保存量

Kassel 大　Walter Strampp
東大工　松木平淳太　(Junta Matsukidaira)
東大工　薩摩　順吉　(Junkichi Satsuma)

1. はじめに

佐藤幹夫氏を中心とする京都大学数理解析研究所のグループが提出した τ 関数の理論がソリトン方程式の研究に与えた影響はきわめて大きいものがある。[1)~5)]この理論によってソリトン方程式の解の代数的構造が示されたと同時に、逆散乱法、広田の方法、Bäcklund 変換の間の関係も明らかになった。

逆散乱法の発見に寄与した無限個の保存量の存在、またそれと密接に関連した対称性の存在は完全可積分性の定義として現在広く受け入れられており、[6)] 今日殆どのソリトン方程式はこの性質を持つことが知られているが、これらの性質も τ 関数の理論によって統一的に扱うことができると予想される。ここでは、τ 関数の理論に基づいて KP hierarchy の保存量、対称性を議論し、その予想が正しいことを示す。またその中で τ 関数が重要な役割を果たすことを指摘する。

2. 偏微分方程式の対称性と保存量

KP hierarchy の対称性と保存量について論ずる前に、空間１次元、時間１次元の独立変数を持つ非線形発展方程式の対称性と保存量について議論する事にする。

発展方程式、

$$u_t = K(u), \tag{2.1}$$

を考える。但し、K は u の汎関数である。次の方程式は (2.1) の線形化された方程式と呼ばれる。

$$S_t = K'(u)[S] \tag{2.2}$$

但し、$K'(u)[S]$ は K の u における S 方向の Fréchet 微分を意味する。すなわち、

$$K'(u)[S] = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} K(u + \varepsilon S)\bigg|_{\varepsilon=0}. \tag{2.3}$$

(2.2) を満たす汎関数 $S(u)$ を対称性と呼ぶ。

$$S_t = S'[u_t], \tag{2.4}$$

から、対称性 S は、

$$[S, K] \equiv S'[K] - K'[S] = 0 \tag{2.5}$$

を満たさなければならない。

$$R'[K] + [R, K'] = 0 \tag{2.6}$$

を満たす作用素 R を recursion operator と呼ぶ。recursion operator が対称性を対称性に写すことはすぐにわかる。

$$I_t = 0 \tag{2.7}$$

または

$$I'[u_t] = I'[K] =< gradI, K >= 0 \tag{2.8}$$

但し

$$< f, g >= \int f g \, dx \tag{2.9}$$

を満足する量 I を保存量という。この式を任意の方向 v に微分すると、次の式が成り立つときまたそのときに限って、γ が保存量 I の gradient である。

$$\gamma[K] + K'^{*}[\gamma] = 0 \tag{2.10a}$$

$$\gamma' = \gamma'^{*}. \tag{2.10b}$$

但し、$*$ は共役量を表わす。γ は conserved covariants と呼ばれる。conserved covariant を conserved covariant に写す operator は squared eigenfunction operator と呼ばれることがある。

$$\rho_t = J_x, \tag{2.11}$$

を満足する量 ρ は保存密度と呼ばれる。

recusion operator は時間 1 次元、空間 1 次元の変数を持つ方程式の理論において、重要な役割をはたす。この事実が時間 1 次元、空間 2 次元の変数を持つ方程式に対する recursion operator を求めることの動機づけとなっている。最近、Fokas と Santini は KP 方程式に対する recursion operator を求めることに

成功した。[7] 彼らはKP方程式を変数 x, t, y_1, y_2 をもつ方程式のある reduction であると考えた。適当な双一次形式と方向微分を導入して、対称性や conserved covariant や recursion operator の概念を 3+1 次元に拡張し、その空間で対称性を対称性に写す recursion operator ϕ_{12} を見いだした。ϕ_{12} の共役量 Δ_{12} は拡張された意味で conserved covariant を conserved covariant に写している。Fokas と Santini はこれらの拡張された意味での対称性と conserved covariant で $y_2 \to y_1$ の極限をとり、KP方程式の対称性や conserved covariant を得たのである。

3. τ 関数の理論

この節では以下の議論に必要な τ 関数の理論の結果を簡単に挙げておく。

擬微分作用素

$$L(x, \partial) = \partial + u_2\partial^{-1} + u_3\partial^{-2} + \cdots \tag{3.1}$$

に対して、L^n の ∂^{-1} を含まない部分を B_n と書くと、

$$B_1 = \partial, \tag{3.2a}$$

$$B_2 = \partial^2 + 2u_2, \tag{3.2b}$$

$$B_3 = \partial^3 + 3u_2\partial + 3u_3 + 3u_{2,x}, \tag{3.2c}$$

が得られる。但し ∂ は $\partial/\partial x$ であり、u_n は x および無限個の時間変数 $t = t_1, t_2, t_3, \cdots$ の関数である。x と t_1 は同一視してもよ

いことを注意しておく。

$$L(x,\partial)\psi(x,\lambda)=\lambda\psi(x,\lambda), \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_n}\psi(x,\lambda)=B_n(x,\partial)\psi(x,\lambda), \quad n=1,2,\cdots. \tag{3.4}$$

を考える。(3.3) と (3.4) の両立条件から Lax 形式

$$\frac{\partial L}{\partial t_n}=[B_n,L]=B_nL-LB_n, \tag{3.5}$$

もしくは Zakhrov-Shabat 形式

$$\frac{\partial B_m}{\partial t_n}-\frac{\partial B_n}{\partial t_m}=[B_n,B_m]. \tag{3.6}$$

が得られる。(3.6) で $n=2, m=3$ ととると KP 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial u_2}{\partial t_3}-\frac{1}{4}\frac{\partial^3 u_2}{\partial t_1^3}-3u_2\frac{\partial u_2}{\partial t_1}\right)-\frac{3}{4}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t_2^2}=0. \tag{3.7}$$

になる。

線形方程式系 (3.3) と (3.4) の形式解は

$$\psi(x,\lambda)=(1+\sum_{i=1}^{\infty}w_i(x)\lambda^{-i})\,exp\,\xi(x,\lambda), \tag{3.8}$$

$$\xi(x,\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}t_n\lambda^n. \tag{3.9}$$

と書ける。但し、w_n は $u_1,u_2,\cdots$ と次の関係で結ばれている。

$$u_2=-w_{1,x}, \tag{3.10a}$$

$$u_3=-w_{2,x}+w_1w_{1,x}, \tag{3.10b}$$

$$u_4=-w_{3,x}+w_1w_{2,x}+w_{1,x}w_2-w_1^2w_{1,x}-w_{1,x}^2, \tag{3.10c}$$

$$\cdots$$

τ 関数の理論の一つの結果は

$$w_n(x) = \frac{1}{\tau} p_n(-\tilde{\partial})\tau, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{3.11}$$

と表わされることである。但し $p_n(x)$ は

$$exp(\sum_{n=1}^{\infty} t_n \lambda^n) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)\lambda^n \tag{3.12}$$

で定義される多項式、$\tilde{\partial}$ は

$$\tilde{\partial} = (\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t_2}, \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial t_3}, \cdots) \tag{3.13}$$

で定義される微分作用素である。τ 関数を用いると

$$\psi(x, \lambda) = \frac{\tau(t_1 - \frac{1}{\lambda}, t_2 - \frac{1}{2\lambda^2}, \cdots)}{\tau(t_1, t_2, \cdots)} exp\,\xi(x, \lambda), \tag{3.14}$$

と書くことができる。

τ 関数は Plücker 関係式と呼ばれる双一次方程式を満足する。その一つがたとえば

$$(4D_{t_1}D_{t_3} - D_{t_1}^4 - 3D_{t_2}^2)\tau \cdot \tau = 0 \tag{3.15}$$

であるが、これはKP 方程式の双一次形式に他ならない。但し、D は

$$D_x^n a(x) \cdot b(x) = (\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'})^n a(x)b(x')\Big|_{x=x'} = \frac{\partial^n}{\partial s^n} a(x+s)b(x-s)\Big|_{s=0}. \tag{3.16}$$

で定義される広田の演算子である。Date らは変換群の理論から Plücker 関係式と同等な式として

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(-2y)p_{n+1}(\tilde{D})\, exp(\sum_{i=0}^{\infty} y_i D_{t_i})\tau \cdot \tau = 0, \tag{3.17a}$$

但し、

$$\tilde{D} = (D_{t_1}, \frac{1}{2}D_{t_2}, \frac{1}{3}D_{t_3}, \cdots). \tag{3.17b}$$

を提出している。[4)]

ψ と共役な波動関数 ψ^* を考えることもできる。ψ^* は

$$L^*\psi^* = \lambda\psi^*, \tag{3.18a}$$

$$\frac{\partial\psi^*}{\partial t_n} = -B_n^*\psi^* \tag{3.18b}$$

を満足している。但し ψ^* の τ 関数による表現は

$$\psi^* = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} w_i^* \lambda^{-i} exp(-t_0 - \lambda t_1 - \lambda^2 t_2 - \cdots)$$

$$= \frac{\tau(t_1 + \frac{1}{\lambda}, t_2 + \frac{1}{2\lambda^2}, \ldots)}{\tau(t_1, t_2, \ldots)} exp(-t_0 - \lambda t_1 - \lambda^2 t_2 - \cdots) \ . \tag{3.19a}$$

$$w_i^* = \frac{1}{\tau} p_i(\tilde{\partial})\tau, \tag{3.19b}$$

である。

$\tau(x)$ が正の整数 ℓ に対して $t_\ell, t_{2\ell}, t_{3\ell}, \cdots$ によらないことを要請すると、ψ は

$$\frac{\partial\psi}{\partial t_\ell} = \lambda^\ell \psi, \tag{3.20a}$$

$$B_\ell \psi = \lambda^\ell \psi. \tag{3.20b}$$

を満足する。これを ℓ-reduction と言う。2-reduction によってえられる方程式の中に KdV 方程式、3-reduction によってえられる方程式の中に Boussinesq 方程式が含まれている。

4. KP hierarchy の保存量

この節では、KP hierarchy の保存量の具体形を微分作用素 B_n の L に対する展開から求める。また τ 関数の立場から見れば保存量は対称群の指標多項式を用いて単純に表現できることを示す。

微分作用素 ∂ を L のべきで展開する。

$$\partial = L + \sigma_1^{(1)} L^{-1} + \sigma_2^{(1)} L^{-2} + \sigma_3^{(1)} L^{-3} + \cdots, \tag{4.1}$$

この作用素を波動関数に作用させると、

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = (L + \sigma_1^{(1)} L^{-1} + \sigma_2^{(1)} L^{-2} + \sigma_3^{(1)} L^{-3} + \cdots)\psi, \tag{4.2a}$$

$$= \lambda\psi + \frac{\sigma_1^{(1)}}{\lambda}\psi + \frac{\sigma_2^{(1)}}{\lambda^2}\psi + \frac{\sigma_3^{(1)}}{\lambda^3}\psi + \cdots, \tag{4.2b}$$

それ故、次の式を得る。

$$(log\,\psi)_x = \lambda + \frac{\sigma_1^{(1)}}{\lambda} + \frac{\sigma_2^{(1)}}{\lambda^2} + \frac{\sigma_3^{(1)}}{\lambda^3} + \cdots. \tag{4.2c}$$

次のような変数を導入する。

$$\sigma^{(1)} = (log\,\psi)_x - \lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^{(1)}}{\lambda^n}, \tag{4.3}$$

後の例で示すように、この式を t のうちの１つで微分した

$$\sigma_t^{(1)} = [(log\,\psi)_t]_x. \tag{4.4}$$

が保存量を与える。$\sigma_n^{(1)}$ を具体的に表わせば、

$$\sigma_1^{(1)} = -u_2, \tag{4.5a}$$

$$\sigma_2^{(1)} = -u_3, \tag{4.5b}$$

$$\sigma_3^{(1)} = -u_4 - u_2^2, \tag{4.5c}$$

$$\sigma_4^{(1)} = -u_5 - 3u_3u_2 + u_2u_{2,x}, \tag{4.5d}$$

$$\sigma_5^{(1)} = -u_6 - 4u_4u_2 - 2u_3^2 - 2u_2^3 + u_{3,x}u_2 - u_{2,xx}u_{2,x} \tag{4.5e}$$

$$\cdots.$$

$\sigma_n^{(1)}$ 各々は KP hierarchy の n+1 次の保存密度である。上に挙げた保存則は x 方向に対するものだが、他の方向についても考えることができる。例えば、B_2 を L のべきで展開すれば、

$$B_2 = L^2 + \sigma_1^{(2)}L^{-1} + \sigma_2^{(2)}L^{-2} + \sigma_3^{(2)}L^{-3} + \cdots \tag{4.6}$$

この作用素を波動関数に作用させると、

$$B_2\psi = \frac{\partial\psi}{\partial t_2} = (L^2 + \sigma_1^{(2)}L^{-1} + \sigma_2^{(2)}L^{-2} + \sigma_3^{(2)}L^{-3} + \cdots)\psi, \tag{4.7a}$$

$$= \lambda^2\psi + \frac{\sigma_1^{(2)}}{\lambda}\psi + \frac{\sigma_2^{(2)}}{\lambda^2}\psi + \frac{\sigma_3^{(2)}}{\lambda^3}\psi + \cdots, \tag{4.7b}$$

この式から、

$$\sigma^{(2)} = (log\,\psi)_{t_2} - \lambda^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_n^{(2)}}{\lambda^n} \tag{4.8}$$

で定義される $\sigma^{(2)}$ はやはり保存則

$$\sigma_t^{(2)} = [(log\,\psi)_t]_{t_2}. \tag{4.9}$$

を満たすことがわかる。$\sigma_n^{(2)}$ を具体的に表わせば、

$$\sigma_1^{(2)} = u_{2,x} + 2u_3, \tag{4.10a}$$

$$\sigma_2^{(2)} = u_2^2 + u_{3,x} + 2u_4, \tag{4.10b}$$

$$\sigma_3^{(2)} = 4u_2u_3 + u_{4,x} + 2u_5, \tag{4.10c}$$

$$\sigma_4^{(2)} = u_{2,xx}u_2 - u_{2,x}^2 - 3u_{2,x}u_3 + 2u_2^3 + u_2u_{3,x}$$
$$+ 6u_2u_4 + 3u_3^2 + u_{5,x} + 2u_6, \tag{4.10d}$$

$$\cdots.$$

これらは t_2 方向の保存密度である。同様にして t_3 方向、t_4 方向、... についても保存密度を求めることができる。

さて保存密度 $\sigma_n^{(m)}$ は τ 関数を用いて表わすことができる。

$$\sigma^{(m)} = (log\,\psi)_{t_m} - \lambda^m, \tag{4.11}$$

に対して (3.14) を用いると

$$\sigma^{(m)} = \frac{\partial}{\partial t_m}\left(log\,\tau(t_1 - \frac{1}{\lambda}, t_2 - \frac{1}{2\lambda^2}, \cdots) - log\,\tau(t_1, t_2, \cdots) + \sum_{n=1}^{\infty} t_n\lambda^n\right)$$
$$- \lambda^m, \tag{4.12}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t_m}\frac{p_n(-\tilde{\partial})log\,\tau}{\lambda^n}, \tag{4.13}$$

が得られる。したがって

$$\sigma_n^{(m)} = \frac{\partial}{\partial t_m}p_n(-\tilde{\partial})log\,\tau \tag{4.14}$$

となる。ここで $\sigma_n^{(m)}$ が次の性質を持っていることに注意しよう。

$$\frac{\partial^2}{\partial t_\ell \partial t_m}log\,\tau = -\ell\sigma_\ell^{(m)} - \sum_{n=1}^{\ell-1}\frac{\partial\sigma_{\ell-n}^{(m)}}{\partial t_n}. \tag{4.15}$$

この性質は、指標多項式 $p_n(x)$ の性質から導くことができる。

さて各々の方程式の保存密度を上で述べた式を使って得ることができることを示そう。まず最初に KP 方程式について議

論する。$\sigma_n^{(m)}$ には無限個の従属変数が含まれている。それ故もし u_2 以外の変数を消去すれば、KP 方程式自身の保存密度を得ることができる。そのために次の Lax 方程式を考えよう。

$$\frac{\partial L}{\partial y} = [B_2, L] \tag{4.16}$$

但し、便宜上、変数を $t_1 = x,\ t_2 = y$ とした。Lax 方程式を書き下すと、

$$\partial_y u_2 = 2\partial_x u_3 + \partial_x^2 u_2, \tag{4.17a}$$

$$\partial_y u_3 = 2\partial_x u_4 + \partial_x^2 u_3 + 2u_2\partial_x u_2, \tag{4.17b}$$

$$\partial_y u_4 = 2\partial_x u_5 + \partial_x^2 u_4 - 2u_2\partial_x^2 u_2 + 4u_3\partial_x u_2, \tag{4.17c}$$

$$\begin{aligned}\partial_y u_5 = {}& 2\partial_x u_6 + \partial_x^2 u_5 + 2u_2\partial_x^3 u_2 - 6u_3\partial_x^2 u_2 \\ & + 6u_4\partial_x u_2,\end{aligned} \tag{4.17d}$$

これらの式を再帰的に解いていくことにより、

$$u_3 = \frac{1}{2}\partial_x^{-1}\partial_y u_2 - \frac{1}{2}\partial_x u_2, \tag{4.18a}$$

$$u_4 = -\frac{1}{2}u_2^2 + \partial_x\left(\frac{1}{4}\partial_x u_2\right) + \partial_y\left(\frac{1}{4}\partial_x^{-2}\partial_y u_2 - \frac{1}{2}u_2\right), \tag{4.18b}$$

$$\begin{aligned}u_5 = {}& -u_2\partial_x^{-1}\partial_y u_2 + \partial_x\left(\frac{3}{4}u_2^2 - \frac{1}{8}\partial_x^2 u_2 + \frac{1}{4}\partial_y u_2\right) \\ & + \partial_y\left\{\frac{1}{8}\partial_x^{-3}\partial_y^2 u_2 - \frac{3}{8}\partial_x^{-1}\partial_y u_2 + \frac{1}{4}\partial_x^{-1}\left(u_2^2\right)\right\},\end{aligned} \tag{4.18c}$$

$$\cdots.$$

を得る。これらを $\sigma_n^{(1)}$ に代入すれば、KP 方程式の保存密度が以下のように得られる。

$$\sigma_1^{(1)} = -u_2, \tag{4.19a}$$

$$\sigma_2^{(1)} = \partial_y \left(-\frac{1}{2}\partial_x^{-1} u_2 \right) + \partial_x \left(\frac{1}{2} u_2 \right), \tag{4.19b}$$

$$\sigma_3^{(1)} = -\frac{1}{2}u_2^2 - \frac{1}{2}\partial_x^2 u_2 + \partial_y \left(\frac{1}{2}u_2 - \frac{1}{4}\partial_x^{-2}\partial_y^1 u_2 \right), \tag{4.19c}$$

$$\begin{aligned} \sigma_4^{(1)} = & -\frac{1}{2}u_2 \partial_x^{-1}\partial_y u_2 - 2\partial_x^{-1}\partial_y \left(\frac{1}{4}u_2^2 \right) + \frac{3}{4}\partial_x \left(u_2^2 \right) \\ & + \frac{1}{8}\partial_x^{-3}\partial_y^3 u_2 - \frac{1}{4}\partial_x^{-1}\partial_y^2 u_2 + \frac{1}{8}\partial_x \partial_y u_2 \\ & - \frac{1}{4}\partial_x^{-1}\partial_y \left(u_2^2 \right) - \frac{1}{8}\partial_x^{-1}\partial_y^2 u_2 + \frac{1}{8}\partial_x \partial_y u_2 \\ & - \frac{1}{8}\partial_x^3 u_2 + \frac{1}{4}\partial_x \left(u_2^2 \right), \end{aligned} \tag{4.19d}$$

$$\cdots .$$

次に reduction によって得られる方程式について議論する。まず、KP hierarchy の 2-reduction である KdV 方程式について考える。2-reduction の条件 $L^2 = B_2$ より、$j > 0$ に対する ∂^{-j} の係数がすべて 0 でなければならないので、

$$u_3 = -\frac{1}{2}u_{2,x}, \tag{4.20a}$$

$$u_4 = \frac{1}{4}u_{2,xx} - \frac{1}{2}u_2^2, \tag{4.20b}$$

$$u_5 = -\frac{1}{8}u_{2,xxx} + \frac{3}{2}u_2 u_{2,x}, \tag{4.20c}$$

$$\cdots .$$

を得る。これらを $\sigma_n^{(1)}$ に代入することによって、

$$\sigma_1^{(1)} = -u_2, \tag{4.21a}$$

$$\sigma_2^{(1)} = -\frac{1}{2}u_{2,x}, \tag{4.21b}$$

$$\sigma_3^{(1)} = -(\frac{u_2^2}{2} + \frac{u_{2,xx}}{4}), \tag{4.21c}$$

$$\sigma_4^{(1)} = (\frac{u_{2,xx}}{8} + \frac{u_2^2}{2})_x, \tag{4.21d}$$

$$\sigma_5^{(1)} = \frac{u_2^3}{2} - \frac{u_{2,x}^2}{8} + (\frac{3u_2^2}{8} + \frac{u_{2,xx}}{16})_{xx}, \tag{4.21e}$$

$$\cdots.$$

を得る。これらはKdV方程式の保存密度である。自明な保存密度が、$n = 2, 4, 6, \ldots$ において現われるのに注意する。このことは(4.15)式からの帰結である。

つぎに、3-reduction の Boussinesq 方程式について考える。$L^3 = B_3$ から、

$$u_4 = -u_{3,x} - \frac{1}{3}u_{2,xx} - u_2^2, \tag{4.22a}$$

$$u_5 = \frac{2}{3}u_{3,xx} + \frac{1}{3}u_{2,xxx} + 2u_2u_{2,x} - 2u_2u_3, \tag{4.22b}$$

$$u_6 = -\frac{1}{3}u_{3,xxx} + 4u_{3,x}u_2 - \frac{2}{9}u_{2,xxxx} - u_2u_{2,xx} - u_{2,x}^2 + 3u_{2,x}u_3 - u_3^2 + \frac{5}{3}u_2^3, \tag{4.22c}$$

$$\cdots.$$

を得る。これらを $\sigma_n^{(1)}$ に代入し、Lax 方程式 $\partial_y u_2 = 2\partial_x u_3 + \partial_x^2 u_2$ より、u_3 を消去して、

$$\sigma_1^{(1)} = -u_2, \tag{4.23a}$$

$$\sigma_2^{(1)} = \frac{1}{2}u_{2,x} - \frac{1}{2}v, \tag{4.23b}$$

$$\sigma_3^{(1)} = \frac{1}{6}(-u_{2,x} + 3v)_x, \tag{4.23c}$$

$$\sigma_4^{(1)} = -\frac{1}{2}u_2v + \left(-\frac{1}{3}v_x - \frac{1}{4}u_2^2\right)_x, \tag{4.23d}$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_5^{(1)} &= \frac{1}{2}u_2^3 - \frac{1}{4}v^2 - \frac{1}{12}u_{2,x}^2 \\
&\quad + \left(-\frac{1}{18}u_{2,xxx} + \frac{5}{6}u_2u_{2,x} + \frac{1}{2}u_2v + \frac{1}{6}v_{xx}\right)_x, \qquad (4.23e)
\end{aligned}
$$

$\cdots$.

を得る。但し、$v = \partial_x^{-1}\partial_y u_2$ である。これらは Boussinesq 方程式の保存密度である。

ℓ-reduction の場合、(4.15) 式から、

$$
\begin{aligned}
\sigma_{n\ell}^{(1)} &= \frac{1}{n\ell}\sum_{k=1}^{n\ell-1}\frac{\partial\sigma_{n\ell-k}^{(1)}}{\partial t_k}, \qquad (4.24a) \\
&= \frac{1}{n\ell}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{k=1}^{n\ell-1}\sigma_{n\ell-k}^{(k)}\right). \qquad (4.24b)
\end{aligned}
$$

を得る。故に l-reduction の KP hierarchy の自明な保存密度は、$n = \ell, 2\ell, 3\ell, \ldots$ で現われる。

最後に BKP hierarchy について考える。BKP に対する線形方程式系は KP と同じ形をしているが、奇数次の時間変数だけ許されていて、さらに $n = 1, 3, 5, \cdots$ に対して、B_n の定数項が 0 であるという条件がついている。この条件から、

$$u_3 = -u_{2,x}, \qquad (4.25a)$$

$$u_5 = -2u_{4,x} + u_{2,xxx}, \qquad (4.25b)$$

$$u_7 = -3u_{6,x} + 5u_{4,xxx} - 3u_{2,xxxxx}, \qquad (4.25c)$$

$\cdots$.

を得る。これらを $\sigma_n^{(1)}$ に代入することによって、

$$\sigma_1^{(1)} = -u_2, \qquad (4.26a)$$

$$\sigma_2^{(1)} = u_{2,x}, \tag{4.26b}$$

$$\sigma_3^{(1)} = -u_4 - u_2^2, \tag{4.26c}$$

$$\sigma_4^{(1)} = (2u_2^2 + 2u_4 - u_{2,xx})_x, \tag{4.26d}$$

$$\sigma_5^{(1)} = -u_6 - 4u_4u_2 - 2u_2^3 - 2u_2u_{2,xx} + 5u_{2,x}^2, \tag{4.26e}$$

$$\cdots.$$

を得る。

Sawada-Kotera 方程式は BKP 方程式の 3-reduction である。それ故もし、$L^3 = B_3$ という条件を課せばこの方程式の保存密度を得る。条件から、

$$u_4 = -u_2^2 + \frac{2}{3}u_{2,xx}, \tag{4.27a}$$

$$u_6 = \frac{5}{3}u_2^3 - 5u_{2,x}^2 - 5u_2u_{2,xx} + \frac{1}{9}u_{2,xxxx}, \tag{4.27b}$$

$$\begin{aligned} u_8 = \frac{1}{27}\bigl(&-90u_2^4 + 1395u_2u_{2,x}^2 + 765u_2^2u_{2,xx} - 345u_{2,xx}^2 \\ &-480u_{2,x}u_{2,xxx} - 120u_2u_{2,xxxx} - u_{2,xxxxxx}\bigr), \end{aligned} \tag{4.27c}$$

$$\cdots.$$

と表わされ、これらを $\sigma_n^{(1)}$ に代入すれば、

$$\sigma_1^{(1)} = -u_2, \tag{4.28a}$$

$$\sigma_2^{(1)} = u_{2,x}, \tag{4.28b}$$

$$\sigma_3^{(1)} = -\frac{2}{3}u_{2,xx}, \tag{4.28c}$$

$$\sigma_4^{(1)} = \frac{1}{3}u_{2,xxx}, \tag{4.28d}$$

$$\sigma_5^{(1)} = \frac{1}{3}(u_2^3 - u_{2,x}^2) + \frac{1}{18}(3u^2 - 2u_{2,xx})_{xx}, \tag{4.28e}$$

$$\cdots.$$

を得る。これらは Sawada-Kotera 方程式の保存密度である。この保存密度の系列は、$n = 2, 4, 6, \ldots$ と $n = 3, 6, 9, \ldots$ に自明な保存密度が現われる。前者は、BKP hierarchy の特徴で、後者は 3-reduction によるものである。

5. KP 方程式の対称性

この節では KP 方程式の対称性が Lax 形式の波動関数 ψ, ψ^* の積 $\psi\psi^*$ によって生成されることを示す。

KP 方程式を t_1 について、積分することによって次式を得る。ただし以下で u_2 を u と書くことにする。

$$\frac{\partial u}{\partial t_3} = \frac{1}{4}\frac{\partial^3 u}{\partial t_1^3} + 3u\frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{3}{4}\partial_{t_1}^{-1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}\right). \tag{5.1}$$

この方程式の線形化されたものは、

$$\frac{\partial S}{\partial t_3} = \frac{1}{4}\frac{\partial^3 S}{\partial t_1^3} + 3\frac{\partial}{\partial t_1}(uS) + \frac{3}{4}\partial_{t_1}^{-1}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial t_2^2}\right). \tag{5.2}$$

となる。

さて $\psi(x,\lambda)$ と $\psi^*(x,\lambda)$ を KP 方程式に付随した線形方程式系の波動関数としよう。すなわち、

$$\frac{\partial \psi}{\partial t_2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_1^2} + 2u\psi, \tag{5.3a}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t_3} = \frac{\partial^3 \psi}{\partial t_1^3} + 3u\frac{\partial \psi}{\partial t_1} + \frac{3}{2}\frac{\partial u}{\partial t_1}\psi + \frac{3}{2}\left(\partial_{t_1}^{-1}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)\psi, \tag{5.3b}$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial t_2} = -\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t_1^2} - 2u\psi^*, \tag{5.4a}$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial t_3} = \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial t_1^3} + 3u\frac{\partial \psi^*}{\partial t_1} + \frac{3}{2}\frac{\partial u}{\partial t_1}\psi^* - \frac{3}{2}\left(\partial_{t_1}^{-1}\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)\psi^*, \tag{5.4b}$$

すると、$\psi\psi^*$ は、

$$\frac{\partial s}{\partial t_3} = \frac{1}{4}\frac{\partial^3 s}{\partial t_1^3} + 3u\frac{\partial s}{\partial t_1} + \frac{3}{4}\partial_{t_1}^{-1}\frac{\partial^2 s}{\partial t_2^2}. \tag{5.5}$$

を満たす。これから $\partial/\partial t_1\,(\psi\psi^*)$ は (5.2) 式を満たし、KP 方程式の対称性を与えることがわかる。(3.8) 式と (3.19a) 式から、

$$\psi\psi^* = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n} w_m(x)w_{n-m}^*(x)\right)\lambda^{-n} \tag{5.6}$$

と書けるので

$$S_n = \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\sum_{m=0}^{n} w_m(x)w_{n-m}^*(x)\right) \tag{5.7}$$

で定義される S_n が無限個の対称性に対応する。

w_m と w_m^* を u で表わすと、

$$S_0 = \frac{\partial}{\partial t_1}(1), \tag{5.8}$$

$$S_1 = \frac{\partial}{\partial t_1}(0), \tag{5.8b}$$

$$S_2 = \frac{\partial}{\partial t_1}(u), \tag{5.8c}$$

$$S_3 = \frac{\partial}{\partial t_2}(u), \tag{5.8d}$$

$$S_4 = \frac{1}{4}\frac{\partial^3 u}{\partial t_1^3} + 3u\frac{\partial u}{\partial t_1} + \frac{3}{4}\partial_{t_1}^{-1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}\right). \tag{5.8e}$$

$$\cdots.$$

を得る。次に、

$$s_n = \sum_{m=0}^{n} w_m(x)w_{n-m}^*(x). \tag{5.9}$$

を τ 関数で表現する。(3.11) 式と (3.19b) 式から、

$$s_n = \sum_{m=0}^{n} p_m(-\tilde{\partial})\tau\cdot p_{n-m}(\tilde{\partial})\tau. \tag{5.10}$$

が得られる。さらに(3.14)式と(3.19a)式より、

$$\psi\psi^* = \frac{\tau(t_1 - \frac{1}{\lambda}, t_2 - \frac{1}{2\lambda^2}, \cdots)\tau(t_1 + \frac{1}{\lambda}, t_2 + \frac{1}{2\lambda^2}, \cdots)}{\tau(t_1, t_2, \cdots)^2}, \quad (5.11a)$$

$$= \frac{1}{\tau(x)^2} exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial_{y_n}}{n\lambda^n} \right) \tau(x+y)\tau(x-y) \Big|_{y=0}, \quad (5.11b)$$

$$= \frac{1}{\tau^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(\tilde{D})\tau \cdot \tau}{\lambda^n} \quad (5.11c)$$

と書けるので、

$$s_n = \frac{1}{\tau^2} p_n(\tilde{D})\tau \cdot \tau. \quad (5.12)$$

を得る。

(3.17a) 式の指数関数の部分を展開することにより、

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(-2y)p_{n+1}(\tilde{D}) \left(1 + \sum_{i=0}^{\infty} y_i D_i + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{\infty} y_i D_i \right)^2 + \cdots \right) \tau \cdot \tau = 0. \quad (5.13)$$

を得る。上の式の y について線形の項について考えてみる。これらは、$n = 0$ の項から得られるもの、

$$p_0(-2y)p_1(\tilde{D}) \left(\sum_{i=0}^{\infty} y_i D_i \right) \tau \cdot \tau, \quad (5.14)$$

と、$n \neq 0$ の項から得られるもの

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-2y_n) p_{n+1}(\tilde{D}) \tau \cdot \tau. \quad (5.15)$$

からなる。それ故、

$$y_n(D_1 D_n \tau \cdot \tau - 2p_{n+1}(\tilde{D})\tau \cdot \tau) = 0, \quad (5.16)$$

または、

$$\frac{1}{2}D_1D_n\tau\cdot\tau = p_{n+1}(\tilde{D})\tau\cdot\tau. \tag{5.17}$$

を得る。(5.17) 式と (3.17a) 式から、

$$s_n = \frac{1}{2}\frac{D_1D_{n-1}\tau\cdot\tau}{\tau^2}. \tag{5.18}$$

と書ける。(5.17) は双一次方程式の組、(3.17a) の部分集合をなしているが、それらは高次の KP 方程式になっている。

$u = \frac{\partial^2}{\partial t_1}(log\,\tau)$ を使うことによって、高次の KP 方程式は

$$u_{t_n} = \frac{\partial}{\partial t_1}(s_{n+1}) = S_{n+1}. \tag{5.19}$$

の形に書けることがわかる。また、(3.19) から、

$$u_{t_n} = \frac{\partial}{\partial t_n}\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}(log\,\tau). \tag{5.20}$$

と書くこともできる。Fréchet 微分を考えることにより、

$$S'_n[S_m] = \frac{\partial}{\partial t_{n-1}}(S_m) = \frac{\partial^2}{\partial t_{n-1}\partial t_{m-1}}\left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}(log\,\tau)\right). \tag{5.21a}$$

$$S'_m[S_n] = \frac{\partial}{\partial t_{m-1}}(S_n) = \frac{\partial^2}{\partial t_{m-1}\partial t_{n-1}}\left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}(log\,\tau)\right). \tag{5.21b}$$

を得る。

$$S'_n[S_m] = S'_m[S_n]. \tag{5.22}$$

であるので、(5.19) は可換な方程式の hierarchy をなしていることがわかる。

6. recursion operator

Fokas と Santini が得た結果と上の結果を較べてみる。その前にまず KdV 方程式について考えよう。(5.1)–(5.5) は 2-reduciton の条件 $\frac{\partial u}{\partial t_2}=0$, $\frac{\partial \psi}{\partial t_2}=\lambda^2\psi$, $\frac{\partial \psi^*}{\partial t_2}=-\lambda^2\psi^*$ を課せば、KdV 方程式の場合についても成り立つ。対称性は KP の場合と同じ形をしていると予想される。さらに簡単な計算によって、$\psi\psi^*$ が次式を満たすことがわかる。

$$\frac{1}{4}\partial_{t_1}^3 s+2u\partial_{t_1}s+u_{t_1}s=\lambda^2\partial_{t_1}s. \tag{6.1}$$

普通これは次のように書かれる。

$$R^*s=\lambda^2 s, \tag{6.2}$$

ここで

$$R^*=\frac{1}{4}\partial_{t_1}+2u-\partial_{t_1}^{-1}u, \tag{6.3}$$

は squared–eigenfunction operator であり、その adjoint operator

$$R=\frac{1}{4}\partial_{t_1}^2+2u+u_{2,t_1}\partial_{t_1}^{-1}, \tag{6.4}$$

は recursion operator である。R は KdV 方程式の対称性をその対称性に写し、R^* は conserved covariants を conserved covariants に写す。

さて、

$$\psi\psi^*=\sum_{n=0}^{\infty}s_n\lambda^{-n}, \tag{6.5}$$

を (6.2) 式に代入することによって、

$$R^*\ s_n=s_{n+2}\qquad for\ n\geq 1. \tag{6.6}$$

が得られるが、R^* の性質から S_n は conserved covariant になっている。また、$S_n = \partial_{t_1} s_n$ は

$$R\, S_n = S_{n+2} \tag{6.7}$$

を満足していることがわかるが、上式が対称性に対する漸化式である。

KP 方程式の場合、KdV 方程式と同じような squared–eigenfunciton operator を見つけることは難しい。しかし、Fokas と Santini はある拡張をすることによって類似物を発見した。Fokas と Santini によって見つけられた KP 方程式の対称性の hierarchy を示した後、これが KP hierarchy と一致する事を示す。

Fokas と Santini が得た結果は以下のとおりである。ψ と ψ^* を次の KP 方程式の線形問題の波動関数であるとする。

$$-\alpha\partial_{t_2}\psi = \partial_{t_1}^2\psi - (q+\kappa)\psi, \tag{6.8a}$$

$$\alpha\partial_{t_2}\psi^* = \partial_{t_1}^2\psi^* - (q+\kappa)\psi^*, \tag{6.8b}$$

但し、α と κ は定数であるとする。
すると

$$\Delta_{12}\psi_1\psi_2^* = 4\kappa\psi_1\psi_2^*, \tag{6.9}$$

を得る。但し、

$$\begin{aligned}\Delta_{12} = \partial_{t_1}^2 &- (q_1+q_2) - \partial_{t_1}^{-1}(q_1+q_2)\partial_{t_1} \\ &+ \partial_{t_1}^{-1}(q_1-q_2)\partial_{t_1}^{-1}(q_1-q_2) \\ &+ \alpha^2\partial_{t_1}^{-2}(\partial_{t_2^1}+\partial_{t_2^2})^2\end{aligned}$$

$$+\,2\alpha(\partial_{t_2^1}-\partial_{t_2^2})-\alpha\partial_{t_1}^{-1}(q_1-q_2)\partial_{t_1}^{-1}(\partial_{t_2^1}+\partial_{t_2^2})$$
$$-\,\alpha\partial_{t_1}^{-2}(\partial_{t_2^1}q_1-\partial_{t_2^2}q_2)-\alpha\partial_{t_1}^{-2}(q_1-q_2)(\partial_{t_2^1}+\partial_{t_2^2}), \quad (6.10)$$

であり、また、q_i, ψ_i, ψ_i^* はそれぞれ、

$$q_i(t_1, t_2^i) = q(t_1, t_2^i), \quad \psi_i(t_1, t_2^i) = \psi(t_i, t_2^i), \quad \psi_i^*(t_1, t_2^i) = \psi^*(t_1, t_2^i).$$

のように２種類の時間変数 t_2^1, t_2^2 に対応した量である。(6.10) で定義された Δ_{12} が KdV 方程式の場合の squared-eigenfunction operator の 2 次元版に対応している。さらに Δ_{12}^* で $t_2^2 \to t_2^1$ の極限をとったものが KP 方程式の recursion operator に対応しているのである。

さて (6.8a) 式と (6.8b) 式において、

$$\alpha = -1, \quad q = -2u, \quad \kappa = 0.$$

と置けば、(6.8a) は (5.3a) と等しくなり、(6.8b) は (5.4a) と等しくなる。それ故、佐藤理論の波動関数に対する次の関係式を得る。

$$\Delta_{12}\psi_1\psi_2^* = 0, \quad (6.11)$$

但し、

$$q = -2u.$$

(3.8) と (3.19a) を用いて $\psi_1\psi_2^*$ を計算すると、

$$\psi_1(t^1)\psi_2^*(t^2) = s_{12}(t^1, t^2)e_{12}(t_2^1, t_2^2) \quad (6.12)$$

が得られる。但し、

$$t^i = (t_1, t_2^i, t_3, \cdots),$$
$$s_{12}(t_1, t_2) = \sum_{n=0}^{\infty} s_{12\ n}(t^1, t^2)\lambda^{-n}, \tag{6.13}$$

$$s_{12\ n}(t^1, t^2) = \sum_{m=0}^{n} w_m(t^1) w^*_{n-m}(t^2),$$
$$= \frac{1}{\tau(t^1)\tau(t^2)} \sum_{m=0}^{n} p_m(-\tilde{\partial}_{t^1})\tau(t^1) p_{n-m}(\tilde{\partial}_{t^2})\tau(t^2), \tag{6.14}$$

$$e_{12}(t_2^1, t_2^2) = exp((t_2^1 - t_2^2)\lambda^2). \tag{6.15}$$

である。さて、

$$(\partial_{t_2^1} - \partial_{t_2^2})\psi_1\psi_2^* = ((\partial_{t_2^1} - \partial_{t_2^2} s_{12} + 2\lambda^2)e_{12}, \tag{6.16a}$$
$$(\partial_{t_2^1} + \partial_{t_2^2})\psi_1\psi_2^* = ((\partial_{t_2^1} + \partial_{t_2^2})s_{12})e_{12}, \tag{6.16b}$$
$$(\partial_{t_2^1} + \partial_{t_2^2})^2\psi_1\psi_2^* = ((\partial_{t_2^1} + \partial_{t_2^2})^2 s_{12})e_{12}. \tag{6.16c}$$

を用いて(6.12)を計算すると、次式を得る。

$$(\Delta_{12}s_{12} - 4\lambda^2 s_{12}) = 0. \tag{6.17}$$

(ただし、$q = -2u$, $\alpha = -1$). 結局、(6.13)式から、

$$\frac{1}{4}\Delta_{12}s_{12\ n} = s_{12\ n+2} \tag{6.18}$$

が得られた。上式が(6.6)の２次元版であり、$t_2^1 \to t_2^2$ の極限をとると、KP 方程式の conserved covariant を conserved covariant に写

していることになる。またadjointなoperator Δ_{12}^* は(5.8)で示した対称性を対称性に写している。

参考文献

1) M. Sato, RIMS Kokyuroku **439**(1981), 30.

2) M. Sato and Y. Sato, in *Nonlinear Partial Differential Equations in Applied Science* ed. by H. Fujita, P. D. Lax and G. Strang (Kinokuniya / North-Holland, Tokyo, 1983) 259.

3) M. Jimbo and T. Miwa, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **19**(1983), 943.

4) E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa, Transformation Groups for soliton equations, in *Nonlinear Integrable Systems — Classical Theory and Quantum Theory,* Ed. by M.Jimbo and T.Miwa(World Scientific Publishing Company,Singapore ,1983).

5) Y. Ohta, J. Satsuma, D. Takahashi and T. Tokihiro, Prog. Theor. Phys. Suppl. **94**(1988), 210.

6) A. S. Fokas, SIAM.**77**(1987),257

7) A. S. Fokas and P. M. Santini, SIAM.**75**(1986),179